

КОНСПЕКТ ДО ТЕМ 36-37

АРИФМЕТИЧНА ТА ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЇ



ANNA.TURBOZNO.MATH

ТЕМА 36.

АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ

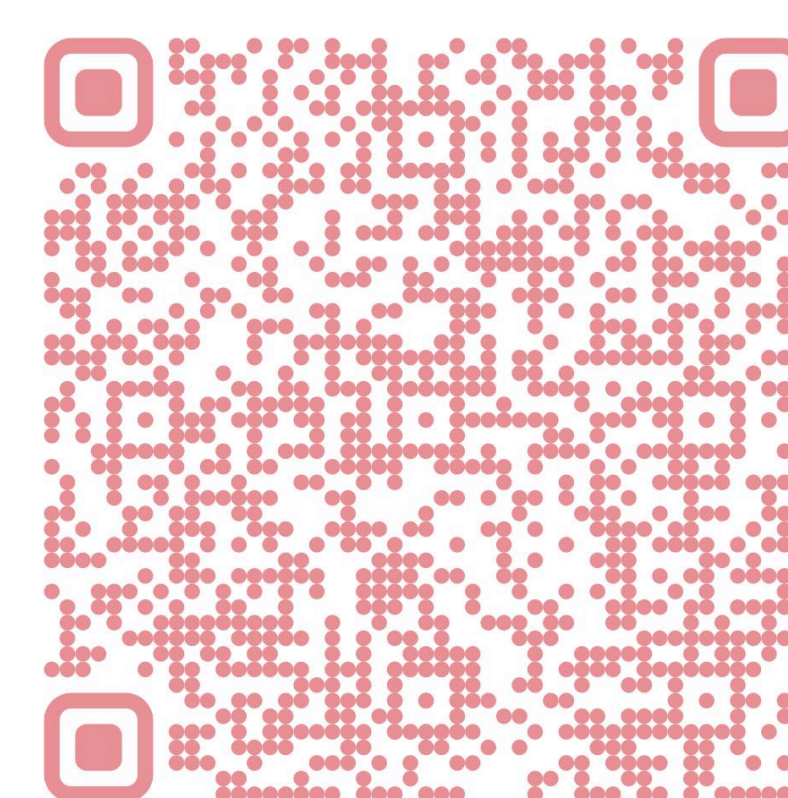
АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Послідовність чисел, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого **додається** одне й те саме число, називають **арифметичною прогресією**.

2; 7; 12; 17; 22 ...

$+5 \quad +5 \quad +5 \quad +5$

ЯК ПРАЦЮЄ
АРИФМЕТИЧНА
ПРОГРЕСІЯ?



Якщо послідовність (a_n) є арифметичною прогресією, тоді для будь-якого натурального значення n справедлива рівність:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Число d називається **різницею арифметичної прогресії**.

Різницю арифметичної прогресії, d , можна знайти, якщо від будь-якого члена арифметичної прогресії, починаючи з другого, відняти попередній.

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Коментар викладача: значення різниці арифметичної прогресії може бути як додатним, так і від'ємним числом.

Наприклад: знайдіть різницю арифметичної прогресії d , де $a_6 = 16$, $a_7 = 4$.

$$d = a_{n+1} - a_n = a_7 - a_6 = 4 - 16 = -12.$$

Відповідь: -12.

ФОРМУЛА N-ГО ЧЛЕНА АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$\boxed{=} a_n = a_1 + d(n - 1), n \in \mathbb{N}$$

Наприклад:

знайдіть a_5 , якщо $a_1 = 7, d = 2$.

$$a_5 = 7 + 2(5 - 1) = 7 + 8 = 15.$$

Відповідь: 15.

$$a_n = a_k + d(n - k), n > k$$

Наприклад:

знайдіть a_5 , якщо $a_3 = 19, d = 3$.

$$a_5 = 19 + 3(5 - 3) = 19 + 6 = 25.$$

Відповідь: 25.

ВЛАСТИВІСТЬ АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Будь-який **член арифметичної прогресії**, починаючи з другого, є **середнім арифметичним** двох сусідніх з ним членів.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Наприклад: знайдіть a_5 , якщо $a_4 = 13, a_6 = 5$.

$$a_5 = \frac{a_{5-1} + a_{5+1}}{2} = \frac{a_4 + a_6}{2} = \frac{13 + 5}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Відповідь: 9.

СУМА АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$\boxed{=} S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Умовна позначка 

Формула є в довідкових матеріалах

СУМА АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Наприклад: знайдіть суму перших шести членів арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 3$, $a_6 = 24$.

$$S_6 = \frac{3 + 24}{2} \cdot 6 = 27 \cdot 3 = 81.$$

Відповідь: 81.

Наприклад: знайдіть суму перших двадцяти непарних натуральних чисел.

1; 3; 5; 7... Непарні натуральні числа складають прогресію, де $a_1 = 1$, $d = 2$.

$$S_{20} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot 20 = \frac{2 + 38}{2} \cdot 20 = \frac{40}{2} \cdot 20 = 20 \cdot 20 = 400.$$

Відповідь: 400.

ТЕМА 37. ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

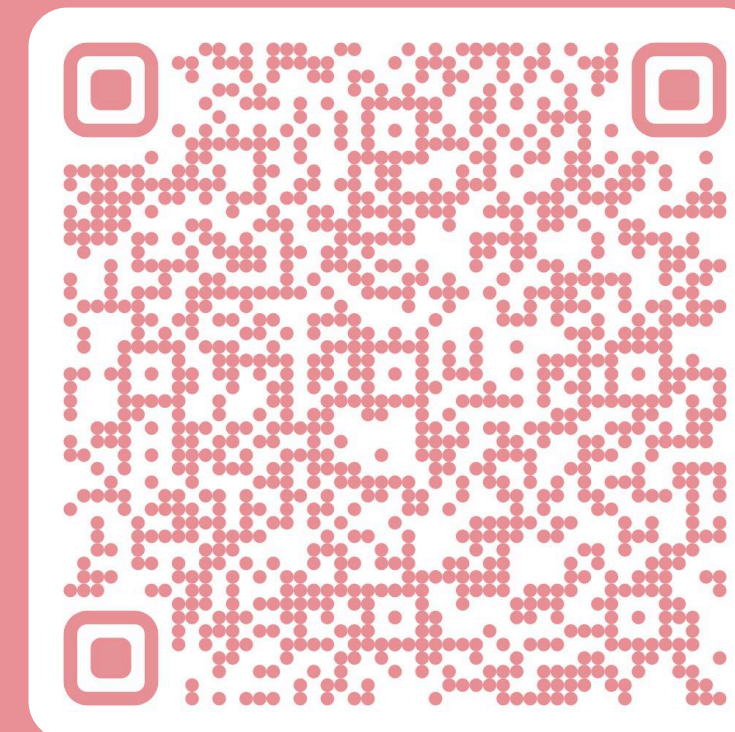
ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Послідовність чисел, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, **помноженому** на одне й те саме число, називається **геометричною прогресією**.

4; 8; 16; 32; 64 ...

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

**ГЕОМЕТРИЧНА
ПРОГРЕСІЯ
НА ТАРО**



Якщо послідовність (b_n) є геометричною прогресією, тоді для будь-якого натурального значення n справедлива залежність.

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Число q називається **знаменником геометричної прогресії**.

Знаменник геометричної прогресії, q , можна знайти, якщо будь-який член геометричної прогресії, починаючи з другого, поділити на попередній.

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Наприклад: знайдіть знаменник геометричної прогресії q , де $b_6 = 4$, $b_7 = 16$.

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{6+1}}{b_6} = \frac{b_7}{b_6} = \frac{16}{4} = 4.$$

Відповідь: 4.

ФОРМУЛА N-ГО ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_n = b_k \cdot q^{n-k}, n > k$$

Наприклад:

знайдіть b_3 , якщо $b_1 = 2$, $q = 5$.

$$b_3 = b_1 \cdot q^{3-1} = b_1 \cdot q^2 = 2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50.$$

Відповідь: 50.

Наприклад:

знайдіть b_6 , якщо $b_4 = 7$, $q = 3$.

$$b_6 = b_4 \cdot q^{6-4} = b_4 \cdot q^2 = 7 \cdot 3^2 = 7 \cdot 9 = 63.$$

Відповідь: 63.

ВЛАСТИВІСТЬ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Будь-який **член геометричної прогресії в квадраті**, починаючи з другого, є **добутком** двох сусідніх з ним членів.

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

ВЛАСТИВІСТЬ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Наприклад: знайдіть b_5 , якщо $b_4 = 2$, $b_6 = 8$, усі члени прогресії додатні.

$$b_5^2 = b_4 \cdot b_6 = 2 \cdot 8 = 16, b_5^2 = 16, b_5 = \pm 4.$$

За умовою усі члени прогресії додатні, отже $b_5 = 4$.

Відповідь: 4.

СУМА ПЕРШИХ N ЧЛЕНІВ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$$

Наприклад: знайдіть суму перших п'яти членів прогресії, якщо $b_1 = 7$, $q = 2$.

$$S_5 = 7 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 7 \cdot \frac{32 - 1}{1} = 7 \cdot 31 = 217.$$

Відповідь: 217.

СУМА НЕСКІНЧЕННО СПАДНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, |q| < 1$$

Наприклад: обчисліть суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії, у якої $b_n = 5 \cdot 3^{-n}$.

$$b_1 = 5 \cdot 3^{-1} = \frac{5}{3}; \quad b_2 = 5 \cdot 3^{-2} = \frac{5}{9}; \quad q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{5}{9} : \frac{5}{3} = \frac{1}{3}.$$

$q < 1$, отже і $|q| < 1$, тому застосовуємо формулу для знаходження суми нескінченно спадної геометричної прогресії:

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{5}{3} : \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3} : \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2,5.$$

Відповідь: 2,5.

Коментар викладача:
геометричну прогресію називають нескінченно спадною, якщо $-1 < q < 1$.

**Переглядай
заняття від Ані
про геометричну
прогресію**

